**Добрый день, 26а группа!**

Продолжаем общаться дистанционно.

Сегодня мы разберем графические методы решения неравенств

Задать вопросы, а также прислать ответы вы можете

1. на адрес электронной почты: ddrmx@ya.ru
2. через соцсеть <https://vk.com/ddrmx>
3. Мессенджер WhatsApp 79180295458

С уважением, Максим Андреевич.

ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ:

Использование свойств и графиков функций

при решении уравнений и неравенств. (2 ЧАСА)

Использование монотонности функций при решении уравнений и неравенств основано на следующих теоретических фактах:

1. Строго монотонная функция принимает каждое свое значение ровно один раз.
2. Если одна функция возрастает, а другая убывает на одном и том же промежутке, то графики их, либо только один раз пересекутся, либо вообще не пересекутся, а это означает, что уравнение F(x)=G(x) имеет не более одного решения.
3. Если на некотором промежутке одна из функций убывает (возрастает), а другая принимает постоянные значения, то уравнение F(x)=G(x) либо имеет единственный корень, либо не имеет корней.

*Пример*

Решите уравнение: ***x3=2−x***

*Решение*

Рассмотрим функции ***f(x)=x3*** и ***g(x)=2−x***.

Функция ***f(x)*** возрастает на всей области определения, а функция ***g(x)*** убывает на области определения. Следовательно, данное уравнение имеет не более одного корня.

Подбором находим, что ***x=1***. Проверкой убеждаемся, что ***x=1*** действительно корень уравнения.

Проверка: 13=2-1; 1=1.

*Ответ*: 1.

Использование четности функции

Функция ***f(x)*** называется четной, если для любого ***x ∈ D***

выполняется равенство: ***f(−x)=f(x)***.

Исследование функций на четность облегчается следующими утверждениями:

* Сумма четных (нечетных) функций является четной (нечетной) функцией.
* Произведение двух четных или двух нечетных функций является четной функцией.
* Произведение четной и нечетной функции является нечетной функцией.
* Если функция f четна (нечетна), то и функция ***1/f*** четна (нечетна).

*Пример*

Может ли при каком-нибудь значении ***a***

уравнение: ***2x8−3ax6+4x4−ax2=5*** иметь 5 корней?

*Решение*

Обозначим ***f(x)=2x8−3ax6+4x4−ax2=5***, где **f(x)** – четная функция. Если ***х0*** – корень данного уравнения, то (***-х0***) – тоже корень. Значение ***х=0*** не является корнем уравнения. Следовательно, число корней у этого уравнения при любом действительном ***a*** четно, поэтому 5 корней оно иметь не может.

Использование ограниченности функции. При решении уравнений и неравенств свойство ограниченности снизу или сверху функции на некотором множестве часто играет определяющую роль.

Если существует такое число С, что для любого ***x∈ D*** выполняется неравенство ***f(x)******C***, то функция ***f*** называется ограниченной сверху на множестве ***D***.



Если существует такое число с, что для любого выполняется неравенство ***f(x) ≥с***, то функция ***f*** называется ограниченной снизу на множестве ***D***.



Функция, ограниченная и сверху, и снизу, называется ограниченной на множестве ***D***. Геометрически ограниченность функции f на множестве D означает, что график функции ***y=f(x)*** при лежит в полосе ***с******f(x)******C***.



*Пример*

Решите уравнение ***sin(x3+2x2+1)=x2+2x+2***

*Решение*

Для любого действительного числа ***х*** имеем

***sin(x3+2x2+1)******x2+2x+2******(x+1)2+1***

Поскольку для любого значения х левая часть уравнения не превосходит единицы, а правая часть всегда не меньше единицы, то данное уравнение может иметь решение только при ***х=-1***.

При ***х=-1*** имеем: ***sin(-1+2+1)=sin2 ≠ 1*** т.е. уравнение корней не имеет.

Домашнее задание: используя график функций, найти корни уравнения





ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ:

Метод интервалов. (2 ЧАСА)

Метод интервалов — это метод решения так называемых рациональных неравенств. Общее понятие рационального неравенства мы обсудим позже, а сейчас начнём с простых примеров.

Напомним прежде всего, что функция ***f(x) = ax + b*** называется линейной. Если ***a ≠ 0***, то

линейная функция называется также многочленом первой степени.

Нули функции ***f(x) = ax2 + bx+ c*** являются корнями квадратного уравнения

***ax2 + bx+ c = 0***

Рассмотрим функцию ***f(x) = x2 + 2x− 3***

Графиком нашей функции ***y = x2 + 2x− 3*** служит парабола, пересекающая ось X в точках −3 и 1. Ветви параболы направлены вверх



На интервалах ***x < −3*** и x > 1 парабола идёт выше оси X; там ***y > 0*** и стоит знак плюс. На

интервале ***−3 < x < 1*** парабола идёт ниже оси X; там ***y < 0*** и стоит знак минус.

Решить неравенство: ***x2+2x+3 > 0***

*Решение.* Дискриминант квадратного трёхчлена ***x2+2x+3*** отрицателен. Это означает, что уравнение ***x2+2x+3 = 0*** не имеет корней. Как же тогда решать исходное неравенство?

Всё очень просто. Выделим в нашем квадратном трёхчлене полный квадрат:

***x2+2x+3*** = (***x2+2x+1***)***+2*** = ***(x+1) 2 +2***

Неравенство приобретает вид: ***(x+ 1) 2 + 2 > 0***

Квадрат всегда неотрицателен, да ещё плюс 2 — это всегда будет положительное число.

Следовательно, данное неравенство выполнено при любых значениях x.

*Ответ:* (−∞; +∞).



И здесь несложно дать графическое объяснение. Поскольку уравнение ***x 2 + 2x + 3 = 0*** не имеет корней, парабола ***y = x 2 + 2x + 3*** не пересекает ось X. Ветви параболы при этом направлены вверх — значит, парабола расположена целиком выше оси X. Значит, функция ***f(x) = x 2 + 2x+ 3*** принимает только положительные значения.

Домашнее задание: решить неравенство: ***(x − 1) (x − 2)2***  ***0***

ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ:

Неравенства с двумя переменными. (2 ЧАСА)

Пара чисел ***(x0 ; y0)*** называется частным решением такого уравнения или неравенства, если при подстановке этой пары в выражение получаем верное уравнение или неравенство соответственно.

Задача состоит в том, чтобы найти или изобразить на плоскости множество всех решений. Можно перефразировать данную задачу – найти геометрическое место точек (ГМТ), построить график уравнения или неравенства.

Пример 1 – решить уравнение и неравенство:

Иначе говоря, задача подразумевает найти ГМТ.



Рассмотрим решение уравнения. В данном случае значение переменной х может быть любым, в связи с этим имеем:



Очевидно, что решением уравнения является множество точек, образующих прямую 



Решениями заданного уравнения являются, в частности, точки (-1;0), (0; 1), (х0, х0+1)

Решением заданного неравенства является полуплоскость, расположенная над прямой , включая саму прямую (см. рисунок 1). Действительно, если взять любую точку х0 на прямой, то имеем равенство . Если же взять точку в полуплоскости над прямой, имеем . Если мы возьмем точку в полуплоскости под прямой, то она не удовлетворит нашему неравенству: .

Теперь рассмотрим задачу с окружностью и кругом.

Пример 2 – решить уравнение и неравенство:



Мы знаем, что заданное уравнение – это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом 1.



В произвольной точке х0 уравнение имеет два решения: (х0; у0) и (х0; -у0).

Решением заданного неравенства является множество точек, расположенных внутри окружности, не учитывая саму окружность.

Домашнее задание:

1. Решить уравнение:

а)  б) 

2. Решить неравенство:

а)  б) 